باسمه تعالی
جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش
باشگاه دانش‌پژوهان جوان

دفترچه سوال رسمی آزمون
واحد سنجش و ارزیابی باشگاه دانش‌پژوهان جوان

علم برای یک ملّت مهم‌ترین ابزار آبرو، پیشرفت و اقتدار است. «امام خامنه‌ای (ره)»

دفترچهٔ سؤالات مرحلهٔ دوم سال تحصیلی ۱۴۰۵-۱۴۰۴

سی و نهمین دورهٔ المپیاد فیزیک

مدت پاسخگویی: ۲۱۰ دقیقه	نوع آزمون: تشریحی
	تعداد سؤالات: ۷

توضیحات مهم

استفاده از هرنوع ماشین‌حساب ممنوع است.

۱- مشخصات خود را با اطلاعات بالای هر صفحه تطبیق دهید. در صورتی که حتی یکی از صفحات پاسخ نامه با مشخصات شما همخوانی ندارد بلافاصله مراقبین را مطلع نمایید.

۲- پاسخ هر سوال را در محل تعیین شده خود بنویسید. چنانچه همه یا قسمتی از جواب سوال را در محل پاسخ سوال دیگری بنویسید به شما نمره ای تعلق نمی‌گیرد.

۳- با توجه به آن‌که برگه‌های پاسخ نامه به نام شما صادر شده است امکان ارائه هیچگونه برگه اضافه وجود نخواهد داشت. لذا توصیه می‌شود ابتدا سوالات را در برگه چرک نویس، حل کرده و آنگاه در پاسخنامه پاکنویس نمایید.

٤- عملیات تصحیح توسط مصححین پس از برش سربرگ به صورت ناشناس انجام خواهد شد. لذا از درج هرگونه نوشته یا علامت مشخصه که نشان دهنده صاحب برگه باشد. خودداری نمایید. در غیر این صورت تقلب محسوب شده و در هر مرحله ای که باشید از ادامه حضور در المپیاد محروم خواهید شد.

٥- از مخدوش کردن بارکدها و مربع‌ها در چهارگوشهٔ صفحه در دفترچهٔ پاسخ‌برگ جداً خودداری کنید. در غیر این صورت برگهٔ شما تصحیح نخواهد شد.

٦- همراه داشتن هر گونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه، ساعت هوشمند، دستبند هوشمند و لپتاپ ممنوع است همراه داشتن این قبیل وسایل حتی اگر از آن استفاده نکنید یا خاموش باشد تقلب محسوب خواهد شد.

۷- در این آزمون کلیه موارد درخواست شده برای هر سوال در قسمت‌های مستطیلی قرار داده شده است. لطفاً در برگه‌های پاسخ، دقیقاً مشخص کنید که جواب کدام پرسش را می دهید.

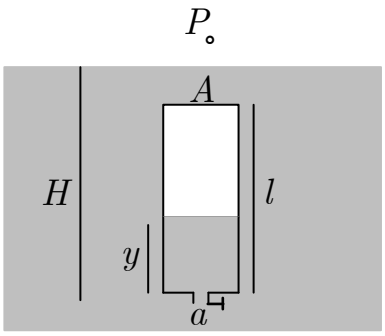
۸- هر سوال این دفترچه ۱۰ نمره دارد.

۹- این دفترچه شامل۷ سوال و با احتساب جلد ۸ برگ است.

کلّیهٔ حقوق این سؤالات برای باشگاه دانش پژوهان جوان محفوظ است.
آدرس سایت اینترنتی: ysc.medu.gov.ir

این صفحه جهت استفاده به عنوان چرک‌نویس در نظر گرفته شده است.

مسئلهٔ ۱) زیردریایی آسیب‌دیده



در این مسئله می‌خواهیم مدل ساده‌ای از رویداد نشت آب دریا به یک زیردریایی آسیب‌دیده را بررسی کنیم. ظرف بسته‌ای به شکل مکعب مستطیل به مساحت مقطع A و ارتفاع l در ابتدا محتوی هوا با فشار P_0 است که با فشار هوای بیرون برابر است. در کف این ظرف سوراخ کوچکی به مساحت مقطع a ایجاد شده که با یک شیر مسدود شده است. در حالی که شیر بسته است ظرف را به طور عمودی به داخل منبع بزرگی از مایعی به چگالی ρ وارد می‌کنیم به طوری که کف ظرف در عمق ثابت H از سطح مایع قرار گیرد و جابه‌جا نشود.

سپس شیر را باز می‌کنیم تا مایع داخل ظرف شود. در یک لحظهٔ نامعین که ارتفاع مایع از کف ظرف y است، سرعت ورود مایع از شیر، v و سرعت بالا رفتن سطح مایع در ظرف، u است. سرعت u به اندازه‌ای کوچک است که با تقریب خوبی می‌توان مایع درون ظرف و منبع را ساکن فرض کرد. نحوهٔ عمل شیر طوری است که وقتی آن را باز می‌کنیم بر اثر اختلاف فشار ΔP در دو سمت آن، مایع با سرعت v در آن جریان می‌یابد، به طوری که $\Delta P = \beta v$. در این رابطه β ضریب ثابتی است. شتاب گرانش را g بگیرید و فرض کنید در تمام فرایند دمای دستگاه ثابت است.

آ) سرعت‌های v و u را بر حسب y و داده‌های ثابت مسئله به دست آورید.

ب) ارتفاع نهایی مایع در ظرف، y_f، را حساب کنید. تحقیق کنید که آیا تحت هر شرایطی مسئله جواب دارد و یا وجود جواب نیازمند برقراری شرط یا شرایط خاصی بر روی داده‌های مسئله است. در چنین صورتی آن شرط یا شرایط را معلوم کنید.

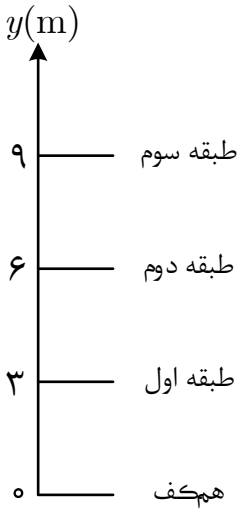
پ) در ارتفاع y_1 سرعت ورود مایع به نصف مقدار اولیه می‌رسد. y_1 را بر حسب داده‌های مسئله بیابید.

ت) نمودار v بر حسب y را به طور کیفی رسم کنید. بر روی نمودار نقاط y_1 و y_f را معلوم کنید.

ث) به ازای $H = 3l$ و $P_0 = 4\rho g l$ جواب بخش‌های **ب** و **پ** را بر حسب l به دست آورید. کمیت‌هایی به شکل جذر اعداد صحیح (مثلاً $\sqrt{17}$) را به همان صورت نگه دارید.

مسئلهٔ ۲) نوعی از آسانسور

آسانسورها از حیث نحوهٔ حرکت انواع مختلفی دارند. برای رفتن از یک طبقه به طبقهٔ دیگر، آسانسور باید از حال سکون با شتاب معینی شروع به حرکت کند و در هنگام ایستادن نیز باید با شتاب کاهنده سرعتش را به صفر برساند. در بین این دو وضعیت ممکن است آسانسور مسافتی را با سرعت ثابت طی کند.



آسانسوری را در نظر بگیرید که با شتاب ثابت $a = ۱/۰\ \mathrm{m/s^۲}$ از حال سکون به حرکت درمی‌آید. اگر آسانسور به سرعت بیشینهٔ $v_m = ۳/۰\ \mathrm{m/s}$ برسد از آن پس، تا قبل از شروع فرایند توقف، با سرعت ثابت به حرکتش ادامه می‌دهد. برای ایستادن در هر وضعیتی، آسانسور از فاصلهٔ $۲/۰$ متری نقطهٔ توقف، طوری ترمز می‌کند که با شتاب ثابتی سرعتش به صفر برسد. این آسانسور در ساختمانی نصب شده که دارای سه طبقه بر روی هم‌کف است. فاصلهٔ هر طبقه از طبقهٔ قبلی یا بعدی آن $۳/۰$ متر است. برای سادگی از زمان باز و بسته شدن آسانسور چشم بپوشید و پاسخ عددی بخش‌های زیر را تا دو رقم معنی‌دار به دست آورید.

آ) چه مدت طول می‌کشد تا آسانسوری که ابتدا در طبقهٔ اول ساکن است به هم‌کف بیاید و در آنجا ساکن شود؟

ب) چه مدت طول می‌کشد تا آسانسوری که ابتدا در طبقهٔ دوم ساکن است به هم‌کف بیاید و در آنجا ساکن شود؟

پ) چه مدت طول می‌کشد تا آسانسوری که ابتدا در طبقهٔ سوم ساکن است به هم‌کف بیاید و در آنجا ساکن شود؟

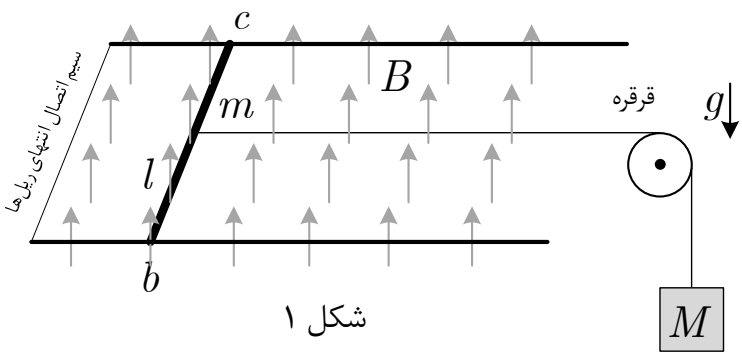
فرض کنید متحرکی با الگویی مشابه آسانسور فوق مسافت دلخواه y را طی کند.

ت) رابطهٔ t بر حسب y را برای حالتی که متحرک به سرعت بیشینه نمی‌رسد به دست آورید.

ث) رابطهٔ t بر حسب y را برای حالتی که متحرک به سرعت بیشینه می‌رسد به دست آورید.

ج) نمودار t بر حسب y را به طور کیفی برای $۲/۵\ \mathrm{m} < y < ۱۰\ \mathrm{m}$ رسم کنید.

مسئلهٔ ۳) حرکت یک میله در میدان مغناطیسی یکنواخت



شکل ۱

در شکل ۱ میلهٔ bc به طول l، جرم m و مقاومت الکتریکی R بر روی یک جفت ریل موازی و بدون اصطکاک حرکت می‌کند. صفحهٔ ریل‌ها صفحه‌ای افقی است و میله همواره بر ریل‌ها عمود است. ریل‌ها رسانای با مقاومت ناچیز هستند و در انتهای سمت چپ با یک سیم رسانای بدون مقاومت به هم متصل‌اند. شتاب گرانش g به سمت پایین و میدان مغناطیسی یکنواخت و ثابت B به سمت بالا برقرار است.

میلهٔ bc در وسط به ریسمان افقی و سبکی بسته شده که از روی قرقره‌ای می‌گذرد و به انتهای دیگرش وزنه‌ای به جرم M آویخته است. پیش از شروع آزمایش جرم M را با دست نگه می‌داریم و در لحظهٔ $t = ۰$ آن را رها می‌کنیم. در لحظهٔ t دلخواه سرعت میله $v(t)$ و جریان القایی در آن $i(t)$ است.

آ) معلوم کنید جریان القایی در میله از b به c است یا از c به b و همچنین $i(t)$ را بر حسب $v(t)$ و کمیت‌های داده شده به دست آورید.

ب) شتاب میله، $a(t)$، را بر حسب $v(t)$ و کمیت‌های داده شده به دست آورید.

در بخش **ب** تابع $a(t) = \dfrac{dv(t)}{dt}$ بر حسب $v(t)$ به دست آمد. به چنین معادله‌ای که شامل یک تابع و مشتق یا مشتق‌های آن است معادلهٔ دیفرانسیل گفته می‌شود. حل چنین معادله‌ای خارج از برنامهٔ درسی شماست. می‌توان نشان داد که پاسخ این معادله به صورت $v(t) = v_f(۱ - e^{-\beta t})$ است، که در آن $e^{-\beta t}$ تابع نمایی نام دارد. این تابع به صورت عدد نپر، $e \cong ۲/۷۲$ به نمای $(-\beta t)$ تعریف می‌شود و در معادلهٔ $\dfrac{de^{-\beta t}}{dt} = -\beta e^{-\beta t}$ صدق می‌کند. کمیت‌های β و v_f از روی معادلهٔ بخش **ب** تعیین می‌شوند. لازم به ذکر است که پس از گذشت زمان خیلی بزرگ‌تر از $\beta^{-۱}$ می‌توان از عبارت $e^{-\beta t}$ چشم پوشید. در نتیجه v_f نشان دهندهٔ سرعت نهایی میله در زمان بزرگ است.

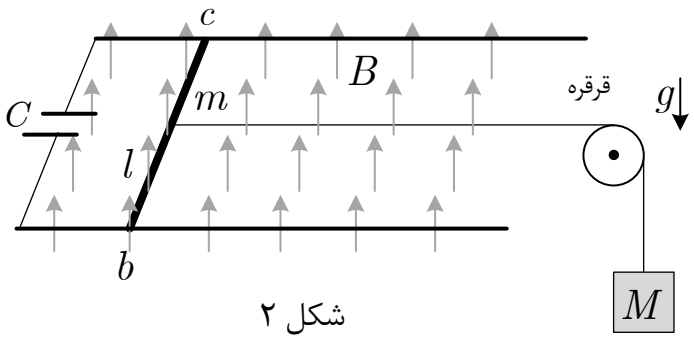
پ) پارامترهای v_f و β را بر حسب داده‌های مسئله تعیین کنید.

ت) شتاب میله در لحظه‌ای که سرعت آن ۹۰٪ سرعت نهایی، v_f، است را حساب کنید.

پس از گذشت زمان زیاد می‌گوییم دستگاه در حالت پایا است. در این حالت انرژی مکانیکی جرم M با آهنگ ثابتی کاهش می‌یابد.

ث ۱) آهنگ کاهش انرژی مکانیکی وزنه در حالت پایا را بر حسب داده‌های مسئله به دست آورید.
ث ۲) توان الکتریکی تلف شده در میله در حالت پایا را بر حسب داده‌های مسئله به دست آورید.

در یک آزمایش دیگر یک خازن با ظرفیت C را مطابق شکل ۲ در مدار قرار می‌دهیم. اگر بار روی خازن در لحظهٔ t را با $q(t)$ و جریان ورودی به آن را با $i(t)$ نشان دهیم رابطهٔ $i(t)=\dfrac{dq}{dt}$ برقرار است.



شکل ۲

ج ۱) شتاب میله را بر حسب $i(t)$ و کمیت‌های ثابت به دست آورید.
ج ۲) قاعدهٔ حلقه را برای مدار شامل خازن بنویسید و $i(t)$ را بر حسب $v(t)$ و $q(t)$ و داده‌های مسئله به دست آورید. چنانچه برای این کار از قانون فارادی استفاده می‌کنید قطع‌شدگی کوچک بین صفحات خازن را نادیده بگیرید و حلقه را مشابه حلقهٔ بسته بگیرید.
ج ۳) از معادلهٔ بخش **ج ۲** نسبت به زمان مشتق بگیرید و با استفاده از نتیجهٔ بخش **ج ۱** مقدار $\dfrac{di}{dt}$ را بر حسب $i(t)$ و سایر داده‌های مسئله به دست آورید.

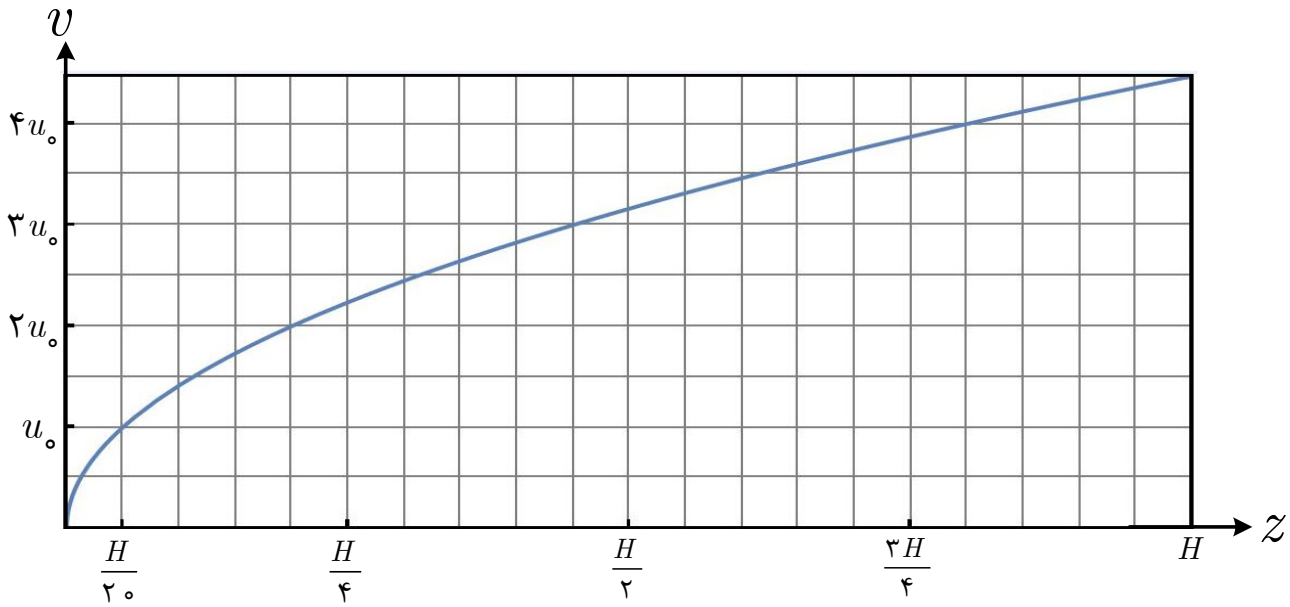
مسئلهٔ ۴) وارونگی هوا

شکل ۱

در این مسئله پدیدهٔ وارونگی هوا در برخی روزهای سرد پائیزی و زمستانی را با یک مدل ساده بررسی می‌کنیم. در این پدیده، به دلیل برخی عوامل جوّی، یک لایهٔ سرد سطحی مطابق شکل ۱ در زیر یک لایهٔ گرم شکل می‌گیرد. لایهٔ گرم که به آن لایهٔ وارونگی می‌گوییم مشابه یک پوشش غیر قابل نفوذ از صعود و پخش شدن آلاینده‌ها جلوگیری می‌کند.

شهری را در نظر بگیرید که در زمینی افقی به شکل مستطیلی به طول L در جهت x و عرض w در جهت y است و بر روی آن لایهٔ سرد سطحی از سطح زمین، $z = ۰$، تا ارتفاع $z = H$ شکل گرفته است. فرض کنید عوامل تولید آلاینده‌ها به طور یکنواخت در سطح شهر پراکنده‌اند به طوری که در هر ثانیه و در هر متر مربع از سطح شهر به مقدار Q کیلوگرم آلاینده تولید می‌شود. آلاینده‌ها ترکیبی از گازهای مضر و ریزذرات معلق در هوا هستند.

در شرایط وارونگی هوا وزش بادهای سطحی تقریباً متوقف می‌شود اما در ارتفاع‌های بالاتر، هوا در جهت $+x$ اندکی جریان دارد. اثر میانگین جریان‌های هم‌رفتی در جهت z صفر است و در ادامهٔ مسئله آن را در نظر نمی‌گیریم. مؤلفهٔ x سرعت باد در سطح زمین ناچیز و در ارتفاع‌های بالاتر مطابق نمودار داده شده در شکل ۲ است.

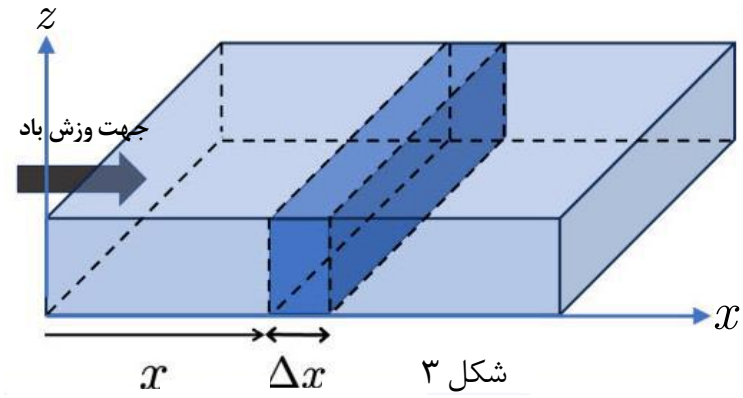


شکل ۲

در این نمودار محور افقی ارتفاع از سطح زمین به صورت کسری از ارتفاع H و محور عمودی مؤلفهٔ x سرعت باد را بر حسب کمیت $u_۰$ نشان می‌دهد که $u_۰$ سرعت معینی است.

آ) با استفاده از نمودار شکل ۲ تندی میانگین باد، $\overline{u}$، در کل لایهٔ سرد سطحی را بر حسب u_0 به دست آورید.

راهنمایی: برای محاسبهٔ تندی میانگین لازم است سطح زیر نمودار از $z=0$ تا $z=H$ را حساب کنید و بر اندازهٔ H تقسیم کنید.



شکل ۳

برای سهولت از این پس فرض کنید مؤلفهٔ x سرعت باد در تمام برش قائم لایهٔ سرد سطحی، که بر محور x عمود است، یکنواخت و برابر $\overline{u}$ است. فرض کنید آلاینده‌ها به محض تولید در جهت‌های y و z به طور یکنواخت در لایهٔ سرد سطحی پخش می‌شوند، اما چگالی آن‌ها به دلیل وزش باد در جهت x، تابعی از x به صورت $C(x)$ است. به عبارت دیگر، در لایهٔ نازکی به ضخامت Δx مطابق شکل ۳ جرم آلاینده‌ها برابر است با $C(x)wH\Delta x$. در حالت پایا چگالی آلاینده‌ها با زمان تغییر نمی‌کند. در این حالت برای لایهٔ Δx شکل ۳ مجموع جرم آلاینده‌های وارد شده به این لایه و آلاینده‌های تولید شده از کف لایه، با جرم آلاینده‌های خارج شده از آن برابر است. به بیان دیگر، جرم کل آلاینده‌ها در لایه، در طی زمان، اضافه یا کم نمی‌شود.

ب) در حالت پایا $C(x+\Delta x)$ را بر حسب $C(x)$، $\overline{u}$، Δx و سایر داده‌های مسئله به دست آورید.

پ) با فرض آن که $C(x=0)=0$، تابع $C(x)$ را به دست آورید.

شاخص کیفیت هوا (AQI) که امروزه در بیان میزان آلودگی هوا از آن استفاده می‌کنیم، در اواسط قرن بیستم به وجود آمده است. مردم و دولت‌ها به عددی ساده و قابل فهم نیاز داشتند تا بتوانند خطر این آلودگی را برای سلامتی بسنجند و آن را اعلام کنند.

روش جالب این شاخص، تعریف عدد ۱۰۰ به عنوان حد مجاز سلامت بود تا مردم بدانند چه زمانی کیفیت هوا ناسالم است. تصور کنید به شما بگویند "غلظت یک آلاینده $50\ \mu g/m^3$ است". این عدد برای عموم قابل درک نیست. اما اگر همان عدد به شما بگوید "AQI روی عدد ۱۵۰ است، یعنی هوا برای همه گروه‌ها ناسالم است" ، آن وقت متوجه می‌شوید که باید ماسک بزنید یا از خانه خارج نشوید.

شاخص AQI همان مترجم داده‌های خام آلودگی به زبان ساده است و به همین دلیل کشورهای بسیاری در جهان از این مدل برای اطلاع‌رسانی به مردم خود استفاده کرده‌اند.

بنابراین برای تبدیل چگالی آلاینده به شاخص AQI از روش زیر استفاده می‌کنیم:

$$I = \frac{I_h - I_l}{C_h - C_l}(C - C_l) + I_l$$

که در آن I شاخص آلودگی هواست. در این مسئله با توجه به بازهٔ آلودگی، مقادیر I_l را ۱۰۱ و I_h را ۱۵۰ انتخاب می‌کنیم و طبق استاندارد تعریف شده $C_l = ۳۵/۵\ \mu\mathrm{g/m^۳}$ و $C_h = ۵۵/۵\ \mu\mathrm{g/m^۳}$ را در نظر می‌گیریم.

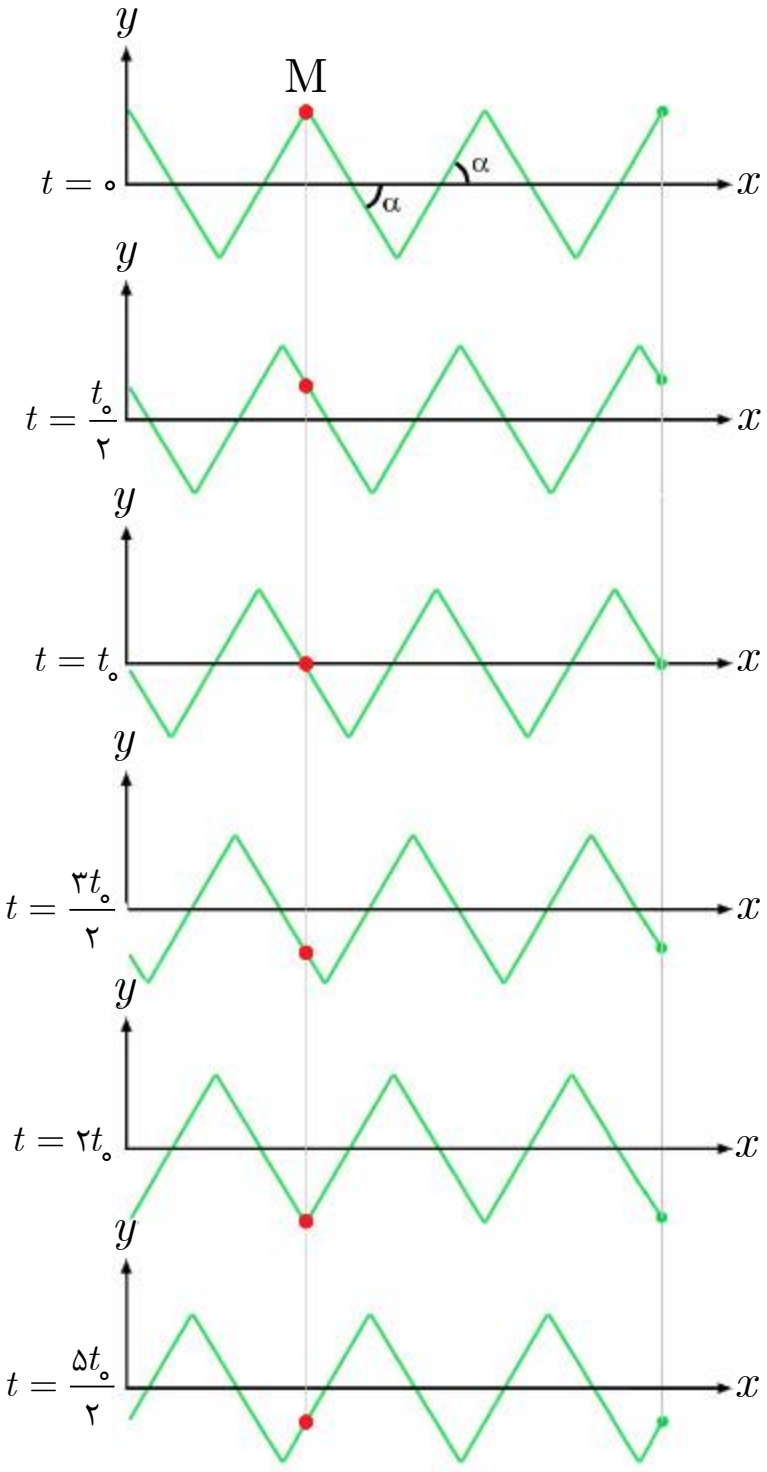
در یک روز پارامترهای محیطی به شکل زیر گزارش شده‌اند:

- سرعت باد در ارتفاع ۱۰ متری، $۱/۰\ \mathrm{m/s}$
- ارتفاع لایه وارونگی، $۲۰۰\ \mathrm{m}$
- طول موثر شهر در مسیر باد، $۱۰\ \mathrm{km}$

ت) با توجه به مقادیر داده شده نرخ تولید آلاینده در واحد سطح، Q، را در وضعیتی که شاخص آلودگی در وسط شهر برابر با ۱۳۰ باشد، بیابید.

مسئلهٔ ۵) حرکت یک مار خاص

در این مسئله می‌خواهیم نوعی از حرکت مار را مدل‌سازی کنیم. ابتدا فرض کنید مار بر روی یک سطح افقی بدون اصطکاک قرار دارد. مار قادر است به کمک عضلاتی که در سراسر بدنش دارد، شکل بدنش را به اصطلاح به صورت موجی درآورد. برای سهولت فرض کنید بدن مار به طور لحظه‌ای به شکل خط شکسته‌ای است که، به جز دو قطعهٔ انتهایی شامل سر و دم، در قسمت‌های میانی از قطعاتی به طول l تشکیل شده است. قطعات به تناوب زاویهٔ α و $-\alpha$ با محور افقی x می‌سازند. هر جزء کوچک از بدن مار در قطعات با شیب مثبت با سرعت ثابت عمودی u به طرف بالا می‌رود و برعکس، هر جزء کوچک از بدن مار در قطعات با شیب منفی با سرعت عمودی ثابت u به طرف پایین می‌رود. در شکل ۱ چند مرحله از تغییر شکل بدن مار نشان داده شده است. به حرکت نقطهٔ M در این شکل توجه کنید. فرض کنید در مدت t_0 جزء کوچکی از بدن مار که در نقطهٔ شکستگی قرار داشته به محور افقی x برسد. در نتیجهٔ این رفتار، نقاط شکستگی (مثلاً نقطهٔ M در شکل ۱) با سرعت c در راستای محور x جابه‌جا می‌شود.

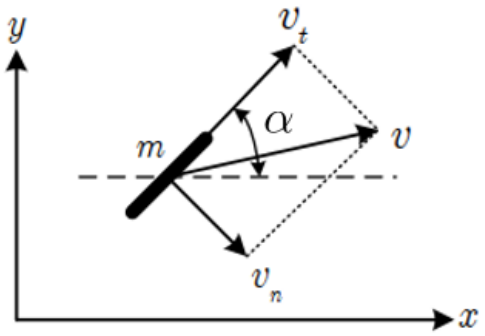


شکل ۱

آ) اندازهٔ سرعت‌های u و c را بر حسب t_0، l و α به دست آورید. جهت سرعت c در شکل ۱ در جهت راست است یا چپ؟

حال فرض کنید مار بر روی یک زمین هموار و افقی دارای اصطکاک قرار گرفته است و همان حرکت‌های قبلی را به بدنش می‌دهد. ساختار بدن مار، به دلیل پولک‌هایی که دارد، طوری است که ضریب اصطکاک جنبشی بدن مار با سطح افقی در امتداد بدن مار μ_t و در امتداد عمود بر بدن آن μ_n است. به دلیل تفاوت این ضرایب، مار قادر است در جهت افقی x جابه‌جا شود. در ادامهٔ مسئله مؤلفهٔ هر بردار در امتداد بدن مار را با شاخص t و در امتداد عمود بر بدن مار را با شاخص n نمایش می‌دهیم.

در شکل ۲ جزء کوچکی از بدن مار به جرم m بر روی صفحهٔ $x-y$ نشان داده شده است. اگر بردار سرعت لحظه‌ای این جزء از بدن مار، $\vec{v}$ و مؤلفه‌های آن در امتداد بدن مار و در امتداد عمود بر آن به ترتیب v_t و v_n باشد، مؤلفه‌های نیروی اصطکاک جنبشی در امتداد بدن مار و در امتداد عمود بر آن به ترتیب زیر است:



شکل ۲

$$f_t = \mu_t mg\frac{v_t}{\sqrt{v_t^2+v_n^2}},\quad f_n = \mu_n mg\frac{v_n}{\sqrt{v_t^2+v_n^2}}.$$

فرض کنید مثل حالت قبل هر جزء بدن مار در راستای y با سرعت ثابت u به بالا (در قطعات با شیب مثبت) و پایین (در قطعات با شیب منفی) می‌رود. در جهت x همهٔ اجزای بدن مار با سرعت لحظه‌ای V حرکت می‌کنند.

ب) مؤلفه‌های v_t و v_n را بر حسب u، α و V برای قطعات با شیب مثبت و قطعات با شیب منفی به دست آورید.

پ) مؤلفه‌های f_t و f_n را بر حسب u، α، V، m، g، μ_t و μ_n برای قطعات با شیب مثبت و قطعات با شیب منفی به دست آورید.

ت) مؤلفه‌های f_x و f_y نیروی وارد بر جزء m از بدن مار را بر حسب متغیرهای مذکور در بخش **پ** برای قطعات با شیب مثبت و قطعات با شیب منفی به دست آورید.

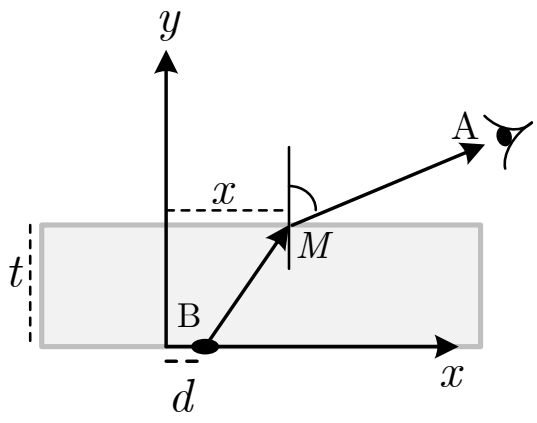
ث) مؤلفه‌های F_x و F_y نیروی کل وارد بر بدن مار را به دست آورید. فرض کنید جرم کل مار M و طول بدن آن $L = ۲nl$ است که n عدد طبیعی است.

ج) فرض کنید سرعت V ثابت است. با این فرض V را بر حسب u، μ_t، μ_n و α به دست آورید.

چ) در چه صورتی جهت سرعت V به سمت راست و در چه صورتی به سمت چپ است؟

مسئلهٔ ۶) تیغهٔ شفاف

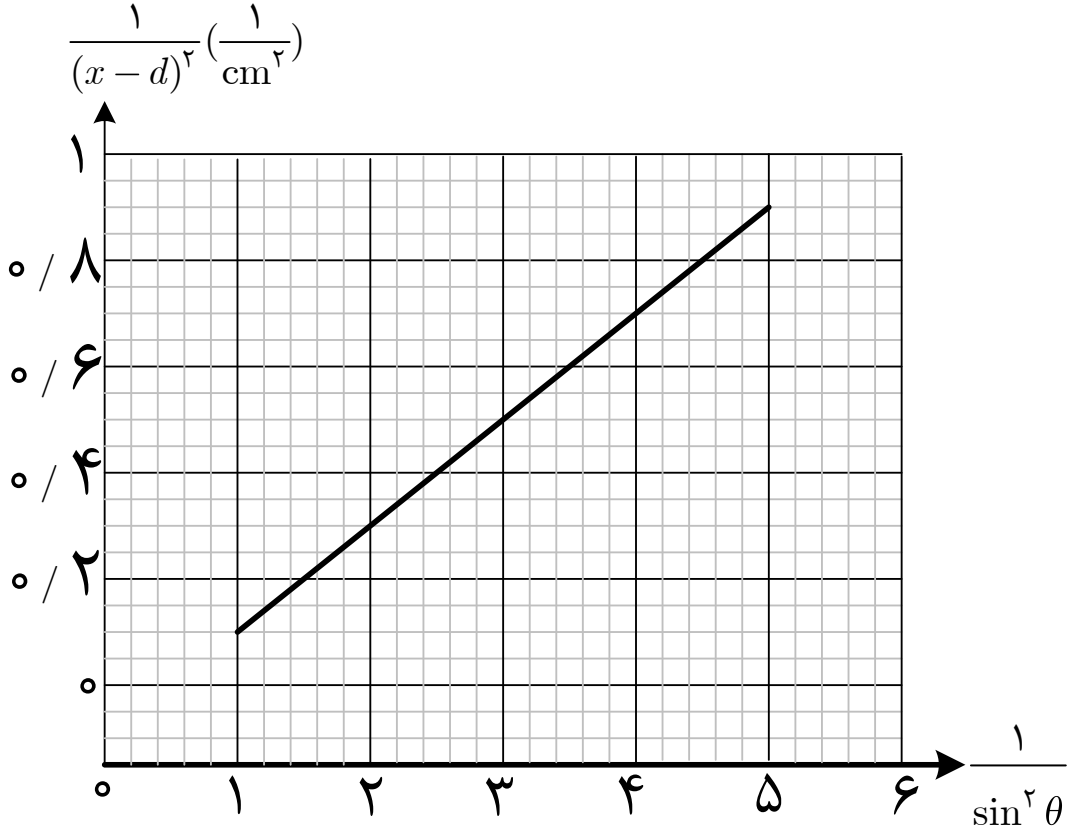
ناظری از نقطهٔ A بالای یک تیغهٔ شفاف به ضخامت t و به ضریب شکست n به نقطهٔ روشن B در زیر تیغه نگاه می‌کند. صفحهٔ xy در شکل ۱ برش قائمی از دستگاه را نشان می‌دهد که نقاط A و B در آن قرار دارند. نقطهٔ B به فاصلهٔ d از محور y قرار دارد. پرتو نوری که از B به A می‌رسد از نقطهٔ M در سطح جدایی تیغه با هوا عبور می‌کند که به فاصلهٔ x از محور y است. این پرتو پس از شکست با امتداد قائم زاویهٔ θ می‌سازد. ضریب شکست هوا را ۱ بگیرید.



شکل ۱

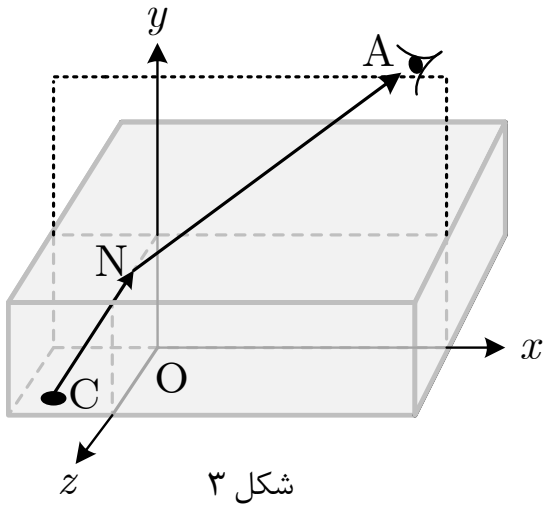
آ) رابطهٔ x را بر حسب θ و سایر کمیت‌های داده شده به دست آورید.

نمودار کمیت $\frac{۱}{(x-d)^۲}$ بر حسب $\frac{۱}{\sin^۲\theta}$ مطابق شکل ۲ است.



شکل ۲

ب) اندازهٔ ضخامت t و ضریب شکست n را با استفاده از اطلاعات این نمودار به دست آورید.



شکل ۳

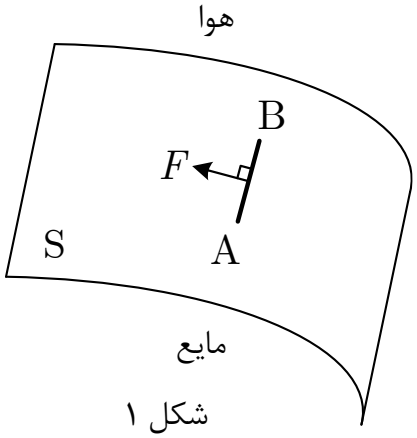
فرض کنید نقطهٔ A در صفحهٔ xy به مختصات $(a,b,0)$ قرار دارد. در این حالت پرتو CNA از نقطهٔ روشن C به مختصات $(x,0,z)$ به نقطهٔ A می‌رسد. این پرتو در مرز جدایی تیغه از هوا از نقطهٔ N به مختصات $(0,t,l)$ عبور می‌کند.

پ) کمیت‌های x و z را بر حسب a، b، t، l و n به دست آورید.

راهنمایی: تصویر پرتوهای CN و NA را در صفحهٔ xz در نظر بگیرید.

مسئلهٔ ۷) حباب

مقدمه: حشرات سبک بدون این که پاهایشان خیس شود می‌توانند روی سطح آب یک برکه راه بروند. در واقع مولکول‌های روی سطح یک مایع مانند لایه‌ای کشسان رفتار می‌کنند که می‌تواند وزن حشره را تحمل کند. به طور کلی سطح مایع در مقابل کشیده شدن عکس‌العمل نشان می‌دهد. به این خاصیت سطح، کمیتی نسبت می‌دهند که کشش سطحی نامیده می‌شود.



شکل ۱

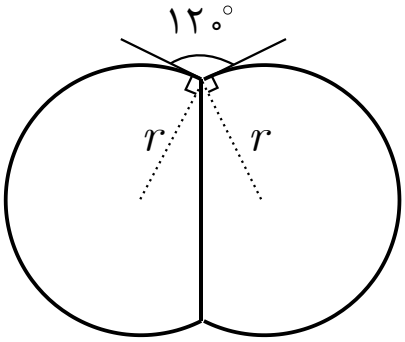
فرض کنید سطح خمیدهٔ S، سطح آزاد یک مایع است، که در سمت دیگر آن هواست. عناصر سطحی واقع در سمت چپ پاره خط کوچک AB به طول l عناصر سمت راست را مطابق شکل ۱ با نیرویی می‌کشند که با طول AB متناسب است، به طوری که $F = \sigma l$. به کمیت σ در رابطهٔ فوق «کشش سطحی» گفته می‌شود که واحد آن نیوتن بر متر است. نیروی F عمود بر AB و مماس بر سطح است. کشش سطحی معمولاً به اندازهٔ سطح بستگی ندارد و با افزایش دما کاهش می‌یابد. در این مسئله از تغییر σ بر اثر دما چشم می‌پوشیم.

در آب صابون یا سفیدهٔ تخم مرغ به راحتی می‌توان حباب درست کرد، ولی کف یا حباب حاصل از آب خالص به شدت ناپایدار است. یک حباب از آب صابون متشکل از دو سطح داخلی و خارجی است که بین آن‌ها مایع آب صابون است. داخل حباب مقداری هوا محبوس است که فشار آن از فشار هوای بیرون حباب بیش‌تر است. ضخامت لایهٔ یک حباب فوق‌العاده کم و در مقابل شعاع حباب قابل اغماض است. یک حباب کروی، یا قسمتی از حباب کروی، به شعاع r در نظر بگیرید که فشار هوای داخل آن P و فشار هوای خارج آن P_0 باشد. می‌توان نشان داد که رابطهٔ $P - P_0 = \frac{4\sigma}{r}$ برقرار است.

توجه: در ادامه **سه مسئلهٔ متفاوت** در ارتباط با پدیدهٔ کشش سطحی داده شده است. فرض‌های هر مسئله مخصوص به همان مسئله است. در هر سه مسئله از گرانش چشم بپوشید و حباب‌ها را معلق در فضا بگیرید. همچنین فرض کنید σ همواره ثابت است.

۷-۱) دو حباب کروی هم جنس با دمای یکسان و شعاع‌های متفاوت با هم یکی می‌شوند و حباب کروی بزرگ‌تری می‌سازند. فشار هوای بیرون P_0 است. هوای داخل حباب‌ها را گاز آرمانی و فرایند یکی‌شدن را هم‌دما فرض کنید. تفاوت حجم حباب نهایی از مجموع حجم حباب‌های اولیه را ΔV و تفاوت سطح حباب نهایی از مجموع سطح حباب‌های اولیه را ΔS بگیرید.

۷-۱) رابطه‌ای بین P_0، ΔV ، ΔS و σ بیابید.

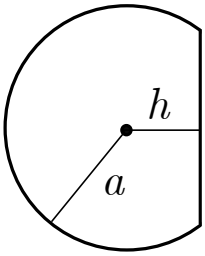


شکل ۲

۲-۷) دو حباب یکسان قبل از یکی‌شدن دستگاهی مطابق شکل ۲ روبه‌رو درست می‌کنند که شامل دو لایهٔ کروی یکسان به شعاع r و یک سطح تخت بین دو حباب است. دو حباب در یک فرایند هم‌دما یکی می‌شوند و حبابی کروی به قطر D تشکیل می‌دهند. می‌توان نشان داد که D در معادله‌ای به صورت

$$D^3 + C_2 D^2 + C_1 D + C_0 = 0$$

صدق می‌کند.



شکل ۳

راهنمایی: اگر مطابق شکل ۳ بخشی از کره‌ای به شعاع a توسط یک صفحهٔ تخت که در فاصلهٔ h از مرکز کره است بریده شود، حجم قسمت نشان داده شده در شکل روبه‌رو برابر است با $\pi(a+h)^2(2a-h)\,/\,3$.

۲-۷) ضرایب C_0، C_1 و C_2 را به دست آورید.

۳-۷) یک حباب کروی به شعاع r محتوی n مول هوا است. کشش سطحی حباب σ و فشار هوای بیرون P_0 است. به هوای داخل حباب اندکی حرارت می‌دهیم. در نتیجه دمای هوای داخل حباب به مقدار جزئی ΔT افزایش می‌یابد. هوای داخل حباب را گاز آرمانی دو اتمی بگیرید.

لازم به ذکر است که تغییر انرژی داخلی n مول گاز آرمانی دو اتمی وقتی دمای آن به اندازهٔ مقدار جزئی ΔT تغییر کند برابر $\frac{5}{2} nR\Delta T$ است.

راهنمایی: اگر کمیت f تابعی از x باشد، تغییرات بسیار کوچک f بر اثر تغییر بسیار کوچک Δx از رابطهٔ $\Delta f = f'(x)\Delta x$ به دست می‌آید که $f'(x)$ مشتق تابع $f(x)$ است.

۳-۷-آ) اگر تغییر حجم هوای داخل حباب بسیار کوچک باشد کاری که هوای داخل حباب روی محیط (لایهٔ حباب به اضافهٔ هوای بیرون) انجام می‌دهد چقدر است؟

۳-۷-ب) با چشم‌پوشی از ظرفیت گرمایی و انرژی داخلی لایهٔ حباب، گرمای داده شده به حباب را بر حسب n، R، P_0، σ، r و ΔT به دست آورید.