

باسمه تعالی											
سوال امتحان راه نهایی درس: ریاضی (۳)	رشته: علوم تجربی	تعداد سوال: ۱۸	تعداد صفحه: ۲								
نام و نام خانوادگی:	ساعت شروع: ۸ صبح	تاریخ امتحان: ۱۴۰۲/۰۲/۱۱	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه								
آزمون هماهنگ راه نهایی دانش آموزان پایه دوازدهم مدارس دولتی و غیردولتی استان مازندران		معاونت آموزش متوسطه استان مازندران http://motvasete-mazand.medu.ir									
ردیف	سوالات پاسخ نامه دارد.	نمره									
۱	<p>درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.</p> <p>الف) برای رسم نمودار تابع $y = f(2x - 1)$ از روی نمودار تابع $y = f(x)$ کافی است نمودار تابع f را ۱ واحد به راست منتقل و سپس طول نقاط را نصف کنیم.</p> <p>ب) تابع $f(x) = x^2 x$ در بازه $(-\infty, 0)$ اکیداً صعودی است.</p> <p>ج) تابع $y = \sqrt{x}$ در $x = 0$ مشتق پذیر نیست و خط $x = 0$ مماس قائم منحنی است.</p> <p>د) دو تابع $g(x) = -\frac{2x+7}{x}$ و $f(x) = \frac{1}{4}x - 3$ وارون یکدیگرند.</p> <p>ه) مکان هندسی مرکز همه دایره‌هایی با شعاع r که بر دایره $C(O, r)$ در صفحه‌ی این دایره مماس خارج‌اند، دایره $C(O, 2r)$ است.</p>	۱/۲۵	<input type="checkbox"/> ن <input type="checkbox"/> د <input type="checkbox"/> ن <input type="checkbox"/> د <input type="checkbox"/> ن <input type="checkbox"/> د <input type="checkbox"/> ن <input type="checkbox"/> د <input type="checkbox"/> ن <input type="checkbox"/> د								
۲	<p>جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب کامل کنید.</p> <p>الف) اگر دامنه تابع $f(x)$ برابر $[-1, 3]$ باشد دامنه تابع $f(x+1)$ برابر است.</p> <p>ب) اگر n عددی طبیعی و زوج باشد آنگاه $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^n = \dots$</p> <p>ج) اگر $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 4$ و $f(1) = 3$ باشد آنگاه $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - 3}{h}$ برابر است.</p> <p>د) مجموعه اعداد گویا و مجموعه اعداد اصم یک روی مجموعه اعداد حقیقی تشکیل می‌دهند.</p> <p>ه) اگر صفحه‌ی p بر محور سطح مخروطی عمود باشد و از راس آن عبور نکند، شکل حاصل است.</p>	۱/۲۵									
۳	<p>در سوالات چهار گزینه‌ای زیر گزینه‌ی مناسب را انتخاب کنید.</p> <p>الف) اگر $(g+f)(2) = 5$ و $g(2) = 4$ و $g'(2) = 3$ و $f'(2) = -1$ باشد حاصل $(gf - 3f)'(2)$ کدام است؟</p> <p style="text-align: center;">-۴ (۱) ۴ (۲) ۲ (۳) -۲ (۴)</p> <p>ب) کدام شکل زیر وضعیت نمودار تابع $y = \frac{-x+1}{ x-2 }$ را در همسایگی $x = 2$ نمایش می‌دهد؟</p> <p style="text-align: center;"> </p> <p style="text-align: center;">(الف) (۱) (ب) (۲) (پ) (۳) (ت) (۴)</p> <p>ج) تابع $y = f(x)$ با دامنه R هم صعودی و هم نزولی است. اگر این تابع از نقطه $(2, 5)$ بگذرد، حاصل $\frac{2f(1)+f(-1)}{3}$ کدام است؟</p> <p style="text-align: center;">۵ (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴)</p>	۱/۵									
۴	<p>نقاط داده شده روی منحنی را با شیب‌های ارائه شده در جدول نظیر کنید. (یکی از نقاط اضافی است)</p>	۰/۷۵	<table border="1" style="display: inline-table; margin-right: 20px;"> <tr> <td>شیب</td> <td>۱</td> <td>$\frac{1}{2}$</td> <td>-۲</td> </tr> <tr> <td>نقطه</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </table>	شیب	۱	$\frac{1}{2}$	-۲	نقطه			
شیب	۱	$\frac{1}{2}$	-۲								
نقطه											
۵	معادله داده شده را حل کنید.	۰/۷۵	$\cos 2x - \sin x = 0$								

۱/۲۵		۶	معادله نمودار تابع مثلثاتی مقابل را بنویسید.
۱/۲۵		۷	<p>به سوالات حدی زیر پاسخ دهید.</p> <p>الف) اگر نمودار تابع f به صورت روبه‌رو باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-2}{f(x)-1}$ را بنویسید.</p> <p>ب) هرگاه $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax^4+bx^3+cx^2}{2x^2+x^2-1}$ برابر ۲ باشد، مقادیر a و b و c را تعیین کنید.</p>
۱	$f(x) = \begin{cases} x^2 + x & x \geq 1 \\ 3x - 1 & x < 1 \end{cases}$	۸	به کمک تعریف مشتق، مشتق پذیری تابع $f(x)$ را در نقطه $x = 1$ بررسی کنید.
۰/۷۵	$y = \sqrt{\frac{2x+1}{2x+5}}$	۹	مشتق تابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)
۱/۲۵	<p>اگر $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = \frac{1}{x}$، آنگاه معادله خط مماس بر نمودار تابع $y = (g \circ f)(x)$ را در نقطه $A(4, \frac{1}{4})$ بنویسید.</p>	۱۰	
۰/۷۵	<p>در تابع با ضابطه $f(x) = x^2 - 1$ آهنگ متوسط تغییر تابع در بازه $[2, 2+a]$ برابر آهنگ لحظه ای تغییر در $x = 4$ است. مقدار a را بدست آورید.</p>	۱۱	
۱	<p>در کره ای به شعاع $R = 2$ استوانه ای محاط کرده ایم، ارتفاع استوانه را طوری بیابید که حجم استوانه بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد. (شعاع قاعده استوانه را r و ارتفاع آن را h فرض کنید)</p>	۱۲	
۱/۵		۱۳	<p>با توجه به نمودار تابع f' به سوالات زیر پاسخ دهید.</p> <p>الف) نقطه ای که در آن تابع f مینیمم نسبی دارد؟ چرا؟</p> <p>ب) نقطه ای که در آن تابع f ماکزیمم نسبی دارد؟ چرا؟</p> <p>ج) نقاط بحرانی تابع f را در صورت وجود بنویسید.</p>
۱	<p>مقادیر b و d را طوری بدست آورید که نقطه $(1, 2)$ نقطه مینیمم نسبی تابع $f(x) = x^2 + bx^2 + d$ باشد.</p>	۱۴	
۱	<p>خروج از مرکز بیضی برابر $\frac{7}{8}$ و اندازه قطر بزرگ آن برابر ۱۰ است. طول قطر کوچک بیضی و فاصله کانون‌های آن را بیابید.</p>	۱۵	
۱		۱۶	<p>دو نقطه A و B روی یک بیضی F و F' کانون‌های بیضی‌اند. باتوجه به شکل اگر $AF' = BF$ باشد، نشان دهید مثلث FMF' متساوی الساقین است.</p>
۱	<p>معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن نقطه‌ی $O(-1, 1)$ بوده و بر دایره به معادله‌ی $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$ مماس بیرونی باشد.</p>	۱۷	
۱/۷۵	<p>به سوالات احتمال زیر پاسخ دهید.</p> <p>الف) دو ظرف یکسان داریم، ظرف اول شامل ۶ مهره‌ی سبز و ۴ مهره‌ی آبی و ظرف دوم شامل ۵ مهره‌ی سبز و ۷ مهره‌ی آبی است. از ظرف اول یک مهره انتخاب کرده، در ظرف دوم قرار می‌دهیم. سپس یک مهره از ظرف دوم انتخاب می‌کنیم. به چه احتمالی این مهره سبز است؟</p> <p>ب) اگر $p(A) = 0/3$ و $p(B) = 0/4$ و $p(E A) = 0/1$ و $p(E B) = 0/8$ باشد حاصل $p(E)$ را محاسبه کنید.</p>	۱۸	
۲۰	جمع نمره		موفق و سربلند باشید.

ریاضی ۳

۱) الف) درست

ب) نادرست

ج) درست

د) نادرست

ه) درست

۲) الف) $[-2, 2]$

ب) $+\infty$

ج) ۴

د)

ه) دایره

۳) الف) مرتبه ۳

ب) مرتبه ۲

ج) مرتبه ۱

مشتق	۱	$\frac{1}{c}$	-۲
نقطه	C	D	A

۴)

$$c \cdot \sin \alpha - \sin \alpha = 0$$

$$1 - r \sin \alpha - \sin \alpha = 0 \rightarrow r \sin \alpha + \sin \alpha - 1 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4(-1)(r) = 9$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin \alpha = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{ca} = \frac{-1 - r}{r} = -1 \end{array} \right. \rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin \alpha = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{ca} = \frac{-1 + r}{r} = \frac{1}{r} = \sin \frac{\pi}{4} \end{array} \right. \rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \\ \alpha = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ \alpha = 2k\pi + (\pi - \frac{\pi}{4}) \end{array} \right\}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-x}{f(x)-1} = \frac{-1}{1^+-1} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

(لا) (الف)

ب

$$\lim \frac{ax^2 + bx^c + cx^2}{x^2}$$

اعداد وتوابعها سحفت نسبيته

(ب) (ص)

$$f'(1)^+ = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+2)}{x-1} = 3 \quad (\text{X})$$

$$f'(1)^- = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2(x-1)}{x-1} = 2$$

$$f(1) = 1 + 1 = 2$$

سنتی بیرونی

(Q)

$$y = \sqrt{\frac{r_{n+1}}{r_{n+d}}}$$

$$\frac{r(r_{n+d}) - r(r_{n+1})}{(r_{n+d})^r}$$

y =

$$r \sqrt{\frac{r_{n+1}}{r_{n+d}}}$$

$$y = \frac{(r+n+0)^r}{r \sqrt{\frac{r+n+1}{r+n+0}}}$$

$$f(n) = \sqrt{n}$$

$$g(n) = \frac{1}{n}$$

$$y = g(f(n)) = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

(10)

$$\Delta\left(\frac{1}{r}, \frac{1}{r}\right) \rightarrow y' = \frac{0 - \frac{1}{r\sqrt{n}}}{(\sqrt{n})^r} = -\frac{1}{r\sqrt{n} \cdot n}$$

$$y'(x) = \frac{-1}{r\sqrt{x} \cdot x} = \boxed{-\frac{1}{14}} = m$$

$$y - \frac{1}{r} = -\frac{1}{14} (n - \varepsilon)$$

$$f(n) = n^r - 1$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(n+h) - f(n)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x) \cdot h}{h} = f'(x) = \Delta$$

(11)

$$[r, r+a]$$

$$f'(n) = rn \rightarrow f'(x) = r(x) = \Delta$$

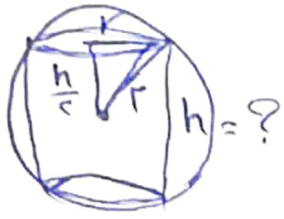
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(r+a) - f(r)}{r+a-r} = \frac{(r+a)^r - 1 - (r^r - 1)}{a} = \frac{(r+a)^r - r^r}{a} = \Delta$$

$$(r+a)^r - \varepsilon = \Delta a$$

$$r^r + \varepsilon a + a^r - r^r = \Delta a$$

$$a^r - \varepsilon a = 0 \rightarrow a(a - \varepsilon) = 0 \begin{cases} a = 0 \text{ (not possible)} \\ a = \varepsilon \checkmark \end{cases}$$

(12)



$$r + \left(\frac{h}{\epsilon}\right)^2 = r^2 \rightarrow r^2 + h^2 = 14$$

$$r^2 = \frac{14 - h^2}{\epsilon}$$

$$V = \pi r^2 \cdot h =$$

$$V = \pi \left(\frac{14 - h^2}{\epsilon}\right) \cdot h = \frac{14\pi h}{\epsilon} - \frac{\pi h^3}{\epsilon}$$

$$V' = 14\pi - \frac{3\pi}{\epsilon} h^2 = 0 \rightarrow \frac{3\pi}{\epsilon} h^2 = 14\pi$$

$$h^2 = \frac{14 \times \epsilon}{3} = \frac{32}{3} \quad h = \sqrt{\frac{32}{3}} \checkmark$$

نقطه C (الف) (۱۳)
 زیرا مشتق در نقطه C منفی است. و مقدارش مثبت است.

نقطه C منفی و عبار نسبتاً ساده است یعنی

n	C
y'	- 0 +

↘ ↗
min

(ب) نقطه b

n	b
y'	+ 0 -

↗ ↘
max

(ج) نقاط a, b, c, d, e, g

$(r, 1)$

$(1, r)$

$$F(n) = r^n + b n^r + d$$

$$1 = r^1 + b(1)^r + d$$

$$r b + d = -1$$

$$r(-r) + d = -1$$

$$d = 0$$

$$F'(n) = r^n + r b n \rightarrow r(r) + r b(1) = 0$$

$$r^2 + r b = 0$$

$$b = -r$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{r}{d} \rightarrow \frac{c}{d} = \frac{r}{d} \rightarrow c = r \quad (10)$$

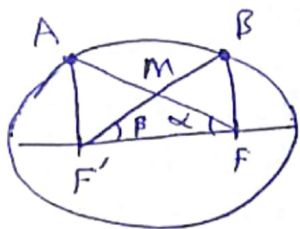
$$2 \text{ قطر کروی} = AA' = 2a = 1 \rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad d^2 = b^2 + r^2 \quad b^2 = 2d - e = 2 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{قطر کروی} = 2b = 2\sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$b = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$\text{قطر کروی} = 2c = 2\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$



(14)

در مثلث
AFF' و BFF'

$$\left\{ \begin{array}{l} AF' = BF \\ FF' = FF' \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \angle FAF' = \angle FBF' \rightarrow \cancel{FA} + AF = \cancel{FB} + BF' \end{array} \right.$$

$$\rightarrow AF = BF'$$

$$\hat{\alpha} = \hat{\beta} \leftarrow \text{دو مثلث برابرند}$$

$$\Delta F'MF \rightarrow F'M = MF$$

یعنی مثلث قائمه‌الساق است

$$O(-1, 1)$$

(14)

$$\text{مثال } x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0 \rightarrow \begin{cases} O'(-\frac{1-r}{r}, -\frac{r}{r}) = (1, -1) \\ R' = \frac{\sqrt{(-r)^2 + r^2 - 4(1)}}{2} = \frac{\sqrt{1}}{r} = \sqrt{r} \end{cases}$$

$$OO' = \sqrt{(-1-1)^2 + (1-(-1))^2} = \sqrt{1} = 2\sqrt{r}$$

$$\text{مثال } \rightarrow OO' = R + R' \rightarrow 2\sqrt{r} = \sqrt{r} + R \rightarrow R = \sqrt{r}$$

$$P(A) = P(G) \cdot P(A|G) + P(B) \cdot P(A|B)$$

(15)

$$= \frac{4}{10} \times \frac{4}{13} + \frac{6}{10} \times \frac{2}{13} = \frac{24}{130}$$

