

باسمه تعالی
جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش
باشگاه دانش پژوهان جوان



دفترچه سوال رسمی آزمون
واحد سنجش و ارزیابی باشگاه دانش پژوهان جوان

علم برای یک ملت مهم ترین ابزار آبرو، پیشرفت و اقتدار است. «امام خاندانی (ره)»

دفترچه سؤالات مرحله دوم سال تحصیلی ۱۴۰۵-۱۴۰۴

چهل و چهارمین دوره المپیاد ریاضی (روز دوم)

نوع آزمون: تشریحی	مدت پاسخگویی: ۲۷۰ دقیقه
تعداد سؤالات: ۳	

استفاده از هر نوع ماشین حساب ممنوع است.

توضیحات مهم

- مشخصات خود را با اطلاعات بالای هر صفحه تطبیق دهید در صورتی که حتی یکی از صفحات پاسخ نامه با مشخصات شما همخوانی ندارد بلافاصله مراقبین را مطلع نمایید.
- پاسخ هر سوال را در محل تعیین شده خود بنویسید. چنانچه همه یا قسمتی از جواب سوال را در محل پاسخ سوال دیگری بنویسید به شما نمره ای تعلق نمی گیرد.
- با توجه به آنکه برگه های پاسخ نامه به نام شما صادر شده است امکان ارائه هیچگونه برگه اضافه وجود نخواهد داشت. لذا توصیه می شود ابتدا سوالات را در برگه چرک نویس، حل کرده و آنگاه در پاسخنامه پاکنویس نمایید.
- عملیات تصحیح توسط مصححین پس از قطع سربرگ به صورت ناشناس انجام خواهد شد. لذا از درج هرگونه نوشته یا علامت مشخصه که نشان دهنده صاحب برگه باشد. خودداری نمایید. در غیر این صورت تقلب محسوب شده و در هر مرحله ای که باشید از ادامه حضور در المپیاد محروم خواهید شد.
- از مخدوش کردن بارکدها و مربعها در چهارگوشه صفحه در دفترچه پاسخ برگه جداً خودداری کنید. در غیر این صورت برگه شما تصحیح نخواهد شد.
- همراه داشتن هر گونه کتاب جزوه یادداشت و لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه، ساعت هوشمند، دستبند هوشمند و لپتاپ ممنوع است همراه داشتن این قبیل وسایل حتی اگر از آن استفاده نکنید یا خاموش باشد تقلب محسوب خواهد شد.
- هر سوال این دفترچه ۱۵ نمره دارد.
- این دفترچه شامل ۳ سوال و با احتساب جلد ۱ برگ است.

کلیه حقوق این سؤالات برای باشگاه دانش پژوهان جوان محفوظ است.
آدرس سایت اینترنتی: ysc.medu.gov.ir

۴. چهارضلعی محدب $ABCD$ با شرط $\angle B = \angle A + \angle C$ مفروض است. نیمساز زاویه $\angle CDA$ ضلع BC را در E قطع می کند و می دانیم $\angle AED = 90^\circ$. پای عمود E به AD و M وسط BE است. نشان دهید چهارضلعی $CDHM$ محاطی است.

۵. فرض کنید برای هر عدد طبیعی k ، $d(k)$ نشان دهنده تعداد مقسوم علیه های صحیح و مثبت k باشد. ثابت کنید دنباله نامتناهی a_1, a_2, a_3, \dots از اعداد صحیح و مثبت وجود ندارد به طوری که برای هر $i < j$ داشته باشیم:

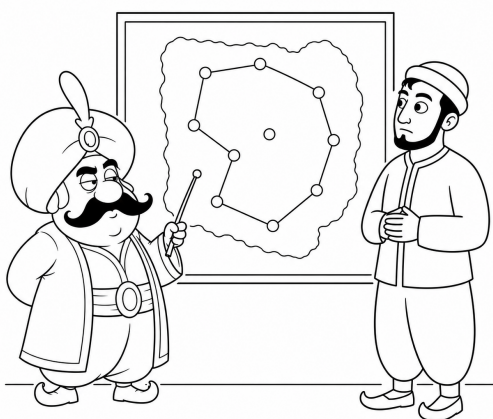
$$d(a_i + a_j) = i + j$$

۶. شکرستان تعدادی روستا دارد و بین هر دو روستا جاده ای جداگانه وجود دارد. نشان دهید اگر تعداد روستاها بیش تر از ۳ تا باشد، حاکم شکرستان می تواند کدخدای هر روستا را طبق ضوابط زیر به بازدیدی از همه روستاها، غیر از روستای خودش، بفرستد.

- هر کدخدا از روستایی شروع کند و بعد از این که از بقیه روستاها دقیقاً یک بار گذشت به همان نقطه شروع برگردد.

- جاده بین هر دو روستا را دقیقاً دو کدخدا طی کنند.

برای مثال، فرض کنید شکرستان ۴ روستا با شماره های ۱ تا ۴ دارد. کدخدای هر روستا باید یک مسیر بسته بین ۳ روستای دیگر طی کند، از روستای خودش بازدید نکند و هر شش جاده بین روستاها دقیقاً دو بار طی شود.



مسیر بازدید روستاها می تواند به این شکل باشد:

- کدخدای روستای ۱: $2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 2$
- کدخدای روستای ۲: $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$
- کدخدای روستای ۳: $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 1$
- کدخدای روستای ۴: $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$