

باسمه تعالی  
جمهوری اسلامی ایران  
وزارت آموزش و پرورش  
باشگاه دانش پژوهان جوان



دفترچه سوال رسمی آزمون  
واحد سنجش و ارزیابی باشگاه دانش پژوهان جوان

علم برای یک ملت مهم ترین ابزار آبرو، پیشرفت و اقتدار است. «امام خاندانی (ره)»

دفترچه سؤالات مرحله دوم سال تحصیلی ۱۴۰۵-۱۴۰۴

## چهل و چهارمین دوره المپیاد ریاضی (روز اول)

نوع آزمون: تشریحی	مدت پاسخگویی: ۲۷۰ دقیقه
تعداد سؤالات: ۳	

### استفاده از هر نوع ماشین حساب ممنوع است.

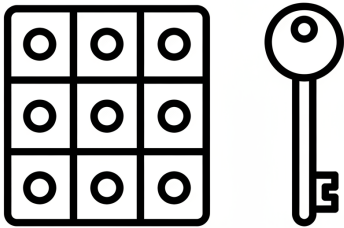
### توضیحات مهم

- مشخصات خود را با اطلاعات بالای هر صفحه تطبیق دهید در صورتی که حتی یکی از صفحات پاسخ نامه با مشخصات شما همخوانی ندارد بلافاصله مراقبین را مطلع نمایید.
- پاسخ هر سوال را در محل تعیین شده خود بنویسید. چنانچه همه یا قسمتی از جواب سوال را در محل پاسخ سوال دیگری بنویسید به شما نمره ای تعلق نمی گیرد.
- با توجه به آنکه برگه های پاسخ نامه به نام شما صادر شده است امکان ارائه هیچگونه برگه اضافه وجود نخواهد داشت. لذا توصیه می شود ابتدا سؤالات را در برگه چرک نویس، حل کرده و آنگاه در پاسخنامه پاکنویس نمایید.
- عملیات تصحیح توسط مصححین پس از قطع سربرگ به صورت ناشناس انجام خواهد شد. لذا از درج هرگونه نوشته یا علامت مشخصه که نشان دهنده صاحب برگه باشد. خودداری نمایید. در غیر این صورت تقلب محسوب شده و در هر مرحله ای که باشید از ادامه حضور در المپیاد محروم خواهید شد.
- از مخدوش کردن بارکدها و مربعها در چهارگوشه صفحه در دفترچه پاسخ برگه جداً خودداری کنید. در غیر این صورت برگه شما تصحیح نخواهد شد.
- همراه داشتن هر گونه کتاب جزوه یادداشت و لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه، ساعت هوشمند، دستبند هوشمند و لپتاپ ممنوع است همراه داشتن این قبیل وسایل حتی اگر از آن استفاده نکنید یا خاموش باشد تقلب محسوب خواهد شد.
- هر سوال این دفترچه ۱۵ نمره دارد.
- این دفترچه شامل ۳ سوال و با احتساب جلد ۱ برگ است.

کلیه حقوق این سؤالات برای باشگاه دانش پژوهان جوان محفوظ است.  
آدرس سایت اینترنتی: [ysc.medu.gov.ir](http://ysc.medu.gov.ir)

۱. قفلی هوشمند شامل ۹ سوراخ به شکل یک جدول  $3 \times 3$  است. در هر لحظه دقیقاً یکی از سوراخ‌ها، بدون این‌که در ظاهر قفل دیده شود، «فعال» است. اگر کلید را در سوراخ فعال وارد کنیم، قفل باز می‌شود و اگر کلید را در سوراخی دیگر وارد کنیم، طبق قواعد زیر سوراخ دیگری فعال می‌شود:

- اگر سوراخ انتخابی و سوراخ فعال در یک سطر باشند، سوراخ سوم همان سطر فعال می‌شود (سوراخی که در آن سطر است و با آن دو متفاوت است).



- اگر سوراخ انتخابی و سوراخ فعال در یک ستون باشند، سوراخ سوم همان ستون فعال می‌شود.

- در غیر این دو صورت، دقیقاً یک سوراخ دیگر وجود دارد که نه هم‌سطر و نه هم‌ستون با سوراخ انتخابی و سوراخ فعال است؛ همان سوراخ فعال می‌شود.

هوشنگ، که قواعد قفل را می‌داند، می‌خواهد قفل را باز کند. او می‌تواند هر بار کلید را در هر یک از ۹ سوراخ (حتی سوراخ‌هایی که قبلاً امتحان کرده است) وارد کند. نشان دهید هوشنگ می‌تواند با یک راه‌برد مناسب، صرف‌نظر از این‌که در ابتدا کدام سوراخ فعال بوده است، حتماً قفل را باز کند. کم‌ترین تعداد دفعاتی که لازم است کلید را وارد سوراخ‌ها کند تا باز شدن قفل تضمین شود چند است؟

۲. دنباله  $x_1, x_2, \dots, x_{100}$  از اعداد طبیعی بزرگ‌تر از ۱۴۰۵ دارای شرایط زیر است:

- برای هر  $1 \leq i \leq 99$  داریم  $x_i \geq x_{i+1}$  و  $x_{50} > x_{51}$ .

- برای هر  $1 \leq i < j < k \leq 100$ ، داریم  $\left[ \frac{x_i + x_j + x_k}{3} \right] = \left[ \sqrt[3]{x_i x_j x_k} \right]$ .

نشان دهید  $\sqrt[3]{x_1} - \sqrt[3]{x_{100}} < \frac{1}{8}$ .

(نماد  $[x]$  نشان‌دهنده بزرگترین عدد صحیح کوچکتر یا مساوی  $x$  است.)

۳. مثلث مختلف‌الاضلاع و حاده‌الزاویه  $ABC$  با مرکز دایره محیطی  $O$  مفروض است.  $I_a$  مرکز دایره محاطی خارجی نظیر رأس  $A$  است. خط  $AI_a$ ،  $BC$  را در  $K$  قطع می‌کند. نقطه  $T$  روی دایره محیطی  $I_a BC$  طوری قرار دارد که مرکز دایره محیطی  $TKI_a$  روی  $BC$  است. ثابت کنید  $AO$  به دایره محیطی مثلث  $ATI_a$  مماس است.